

Листок 2

Векторные пространства и линейная зависимость

Задача 1. Определите, какие из следующих множеств векторов в $\mathbb{R}^3$ образуют подпространство:

- (1) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$;
- (2) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5\}$;
- (3) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = 0\}$;
- (4) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 5x_3\}$;

Задача 2. Обозначим через $\mathbb{R}[x]$ множество всех многочленов с коэффициентами в $\mathbb{R}$, а через $\mathbb{R}[x]_d$ — множество всех многочленов степени $d > 0$.

- (1) Является ли $\mathbb{R}[x]$ векторным пространством над $\mathbb{R}$? (с обычным сложением многочленов и умножением их на скаляры).
- (2) Является ли $\mathbb{R}[x]_d$ подпространством в $\mathbb{R}[x]$?

Задача 3. Приведите пример непустого множества $U \subset \mathbb{R}^2$, замкнутого относительно сложения и взятия обратного элемента (т.е. такого, что из $u \in U$ следует $-u \in U$), которое не является подпространством в $\mathbb{R}^2$.

Задача 4. Докажите, что если векторы $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы в пространстве V , то линейно независимы и векторы

$$e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n.$$

Задача 5. Пусть $U \subset \mathbb{R}^5$ — подпространство, заданное как

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\}.$$

Найдите базис в U .

Задача 6 (Кострикин¹, 6.11). Когда система векторов обладает ровно одним базисом?²

Напомним, что *фундаментальной системой решений* (ФСР) системы линейных однородных уравнений называется любой базис пространства решений этой системы.

¹Номера задач по задачку Кострикина (2 издание, 2015 г.)

²Имеется в виду, что базис выбирается из самих векторов системы. Если же под базисом системы векторов понимать (любой) базис их линейной оболочки, ответ будет другим (что подсказывает Задача 4), и читателю, возможно, придется познакомиться с векторными пространствами над полем $\mathbb{F}_2$ (см. Листок 2*).

Задача 7 (8.4 в,г). Найдите общее решение и фундаментальную систему решений системы уравнений

$$(a) \quad \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$