

Листок 4

Обратная матрица. Матричные уравнения

Задача 1. Пусть для матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ существует обратная. Пользуясь правилом Крамера (например), выпишите явно обратную матрицу.

Задача 2.

- (a) Пусть A и B — квадратные матрицы размера $n \times n$, причем $AB = E$ (единичная матрица). Верно ли, что $BA = E$?
- (b) Пусть A и B — матрицы размеров $n \times m$ и $m \times n$ соответственно, причем $AB = E$ — единичная матрица размера $n \times n$. Верно ли, что BA — единичная матрица размера $m \times m$?

Задача 3 (Кострикин, 18.9 ж, л). Найти обратную матрицу.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Задача 4 (Кострикин, 18.3 в, е, л). Решить матричные уравнения

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Докажите, что матричное уравнение $AX = B$ с квадратной матрицей A размера $n \times n$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\text{rk } A = n$.

Задача 6. Как изменится A^{-1} , если матрицу A подвергнуть одному из следующих преобразований:

- (a) переставить i -ю и j -ю строки;
- (b) i -ю строку умножить на ненулевое число;
- (c) записать её строки в обратном порядке;
- (d) транспонировать относительно побочной диагонали;
- (e) повернуть на 90° против часовой стрелки?